

Ενδέκατο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

- (i) Να βρείτε μια λύση (αναλυτικά) y_1 της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) γύρω από το $x_0 = 0$ και να περιγράψετε μια γραμμικά ανεξάρτητη λύση y_2 , της y_1 .
- (ii) Υπάρχει άρτια λύση της εξίσωσης (E);
- (iii) Σε περίπτωση που η y_1 ορίζεται στο $(0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι ένα άνω φράγμα της y_1 στο διάστημα $[0, 2]$ είναι το e .

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad x^2y'' - (x^2 + x)y' + y = 0,$$

- (i) Να αποδείξετε ότι το σημείο $x_0 = 0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο της (E).
- (ii) Να βρείτε μία λύση y_1 της (E) της μορφής $y_1(x) = |x|^a \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, για $x \neq 0$ και a κατάλληλη σταθερά.
- (iii) Να επιλύσετε την εξίσωση στο $(0, +\infty)$ υποβιβάζοντας την τάξη της (δεν απαιτούνται αναλυτικοί υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ